Zeitschrift für
Semiotik
Band 40 • Heft 3-4 (2018)
Seite 3-25
Stauffenburg Verlag Tübingen

Diagrammatik in Mathematik und Musik

Martin Brunner, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Summary. This article compares diagrams and the so-called diagrammatic thinking in mathematics and music. Differences in the use of signs and in the formation of meaning are made visible.

Zusammenfassung. Im vorliegenden Aufsatz werden Diagramme und das sogenannte diagrammatische Denken in Mathematik und Musik miteinander verglichen. Es werden dabei Unterschiede im Zeichengebrauch und in der Bedeutungsbildung sichtbar gemacht.

1. Einleitung

Im vorliegenden Artikel werden diagrammatische Tätigkeiten in den Bereichen Mathematik und Musik miteinander verglichen. Der Begriff „Diagrammatik" steht dabei für das Zusammenwirken der Konzepte „Diagramm" und „Diagrammatisches Denken". Beide Konzepte gehen auf den amerikanischen Philosophen und Mathematiker Charles Sanders Peirce (1839–1914) zurück. Durch den angeführten Vergleich werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Hinblick auf die verwendeten Zeichen (Inskriptionen, akustische Zeichen), Zeichensysteme und Zeichentätigkeiten in beiden Bereichen sichtbar gemacht, wodurch wiederum Rückschlüsse auf Eigenheiten der Bedeutungsbildung gezogen werden können. Indirekt geht es dabei auch um die häufig behauptete Verwandtschaft von Mathematik und Musik.

Bei der angeführten Untersuchung wird eine spezielle Perspektive bezogen: Es wird ausschließlich komponierte und klassische Musik betrachtet. Die Konzepte „Diagramm" und „Diagrammatisches Denken" werden mit dem Bedeutungsbegriff des österreichischen Philosophen Ludwig Wittgenstein (1889–1951) verbunden. Die Symbiose der angeführten Begriffe von Peirce und Wittgenstein erlaubt eine nichtreferentielle Sicht auf Zeichentätigkeiten und Bedeutungskonstruktion. Eine wesentliche Intention des vorliegenden Artikels ist es auch, diese spezielle Betrachtungsweise (Symbiose aus Konzepten von Peirce und Wittgenstein) als taugliches semiotisches Analysemittel vorzustellen. Der nachfolgend angeführte Einführungsteil in die Betrachtungsgrundlagen ist daher etwas ausführlicher gestaltet.

2. Betrachtungsgrundlagen

Die angeführte spezielle Perspektive auf Zeichen und Bedeutungskonstruktion erfordert eine eingehende Darstellung. Wie erwähnt, wird im Folgenden das Konzept des Diagramms nach Peirce mit dem Bedeutungsbegriff nach Wittgenstein verbunden. Zunächst zum Bedeutungsbegriff nach Wittgenstein: Nach Wittgenstein haben Wörter, Sätze und generell Zeichen keine Bedeutung an sich. Die Bedeutung eines Wortes ist etwa durch seine Rolle im Sprachspiel bestimmt. Mit Rolle ist die Art und Weise gemeint, nach welcher im Sprachspiel mit dem Wort kalkuliert wird, nach welchen Regeln also das Wort gebraucht wird. Die dabei geltenden Verwendungsregeln sind durch das Sprachspiel bestimmt. Wittgenstein (1984a: 67) schreibt:

> Ich sagte, die Bedeutung eines Wortes sei die Rolle, die es im Kalkül der Sprache spiele. (Ich verglich es mit einem Stein im Schachspiel.) Und denken wir nun daran, wie mit einem Wort, sagen wir z. B. „rot“ kalkuliert wird. Es wird angegeben, an welchem Ort sich die Farbe befindet, welche Form, welche Größe der Fleck oder der Körper hat, der die Farbe trägt, ob sie rein oder mit anderen vermischt, dunkler oder heller ist, gleich bleibt oder wechselt, etc. etc. Es werden Schlüsse aus den Sätzen gezogen, sie werden in Abbildungen, in Handlungen übersetzt, es wird gezeichnet, gemessen und gerechnet.

Die Bedeutung eines Satzes resultiert aus dem Zusammenwirken einzelner Wörter und der daraus resultierenden Spielstellung. Wittgenstein (1984a: 172) schreibt: „Es gibt auch keinen alleinstehenden Satz. Denn was ich ‚Satz‘ nenne ist eine Spielstellung in einer Sprache.“

Wittgenstein definiert selbst nicht, was er als Sprachspiel versteht. „Er gebraucht das Wort, indem er Beispiele anführt und den Umgang mit ihm beschreibt. Auf diese Weise verleiht er ihm Bedeutung“ (Meyer 2010: 59–60). Wittgenstein (2003: 26) gibt eine Vielzahl von Beispielen für Sprachspiele wie etwa: „Beschreiben eines Gegenstands nach dem Aussehen, oder nach Messungen“, „Herstellen eines Gegenstands nach einer Beschreibung (Zeichnung)“, „Über den Hergang Vermutungen anstellen“, „Ein angewandtes Rechenexempel lösen“. Trotz der Verwendung des Wortes „Spiel“ im Zusammenhang mit Mathematik ist Wittgenstein (1978: 171) aber nicht der Meinung, dass Mathematik in jeder Hinsicht ein Spiel ist:

> Es ist sehr oft behauptet worden, die Mathematik sei ein Spiel, dem Schach vergleichbar. In einem Sinne ist diese Behauptung offensichtlich falsch: die Mathematik ist kein Spiel in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes. In einem anderen Sinn ist sie offensichtlich wahr: es gibt eine gewisse Ähnlichkeit. Nun sollte man aber nicht Partei ergreifen, sondern vielmehr eine Untersuchung anstellen. Manchmal ist

> es eben nützlich, die Mathematik mit einem Spiel zu vergleichen, und manchmal ist es irreführend.

Wittgenstein (2003: 56) sieht aber „Familienähnlichkeiten“, welche speziell im Zusammenhang mit dem Regelcharakter und der Bedeutungskonstitution wirksam sind. Die Bedeutung nonphonetischer Inskriptionen ist im Wittgenstein’schen Sinne ebenfalls durch deren Gebrauch bestimmt. Auch sie haben keine Bedeutung an sich. Eine Wellenlinie kann etwa als Zeichen für „Trennung von oben-unten“, „auf und ab“, „Vagheit“, „Bewegung“, „Wellen“, „Wasser“ usw. gebraucht werden. Man kann sie aber mithilfe entsprechender Regeln auch als „Sinus-“ oder „Cosinusfunktion“ verwenden.

Im Zusammenhang mit Musik kann der Begriff „Sprachspiel“ auf ähnliche Weise verwendet werden. In Anwendung des Wittgenstein’schen Bedeutungsbegriffs haben wiederum akustische und inskriptionale Zeichen keine Bedeutung an sich. Ein einzelner Ton kann etwa als akustisches Zeichen Bedeutung erhalten, indem man ihn als Beginn bzw. Ende einer Pause, als Signal einer Gefahr oder als liegenbleibender Ton in einem Musikstück, als sogenannter Orgelpunkt, sogar als Zeichen für „unendlich“ gebraucht. Er kann im Zusammenhang mit Strukturen der Musik aber auch zur Bekräftigung oder Durchbrechung von Hörgewohnheiten bzw. Hörerwartungen eingesetzt werden. Auch auf Töne aufbauende Strukturen wie etwa Tonleitern, Motive, Melodien oder harmonische Muster haben nach der Wittgenstein’schen Betrachtungsweise keine Bedeutung an sich. Auch hier kann Bedeutung so gesehen werden, dass sie aus einem von den Komponierenden intendierten oder aufgrund von Traditionen etablierten Gebrauch der Zeichen resultiert. Ebenso kann Bedeutungsbildung beim aktiven, verstehenden Hören als strukturierender Prozess gesehen werden, bei welchem akustische Zeichen nach erworbenen Mustern vom Rezipienten verwendet werden. Äquivalent zum Begriff „Sprachspiel“ wird im Folgenden der Begriff „Zeichenspiel“ verwendet. Auch dieser Begriff geht auf Wittgenstein zurück (vgl. etwa Wittgenstein 1984b: 257). Er ist an sein Sprachspiel angelehnt.

2.1 Diagramme

Zentral für die nachfolgend angeführten Überlegungen ist der Begriff des Diagramms. Die Sicht auf Zeichen und damit auch auf Diagramme kann generell referentiell oder nichtreferentiell sein. Im Falle einer referentiellen Betrachtungsweise sind Zeichen Bezeichner – sie repräsentieren Objekte. In der Mathematik sind dies abstrakte Objekte. Sie entziehen sich unserer Wahrnehmung. Demgegenüber sind im Falle einer nichtreferentiellen Sicht die Zeichen selbst das Betrachtete. Ihre Bedeutung entsteht nach der Wittgenstein’schen Sicht durch deren regelkonformen Gebrauch. Obwohl Peirce nach seiner Zeichentriade eher eine referentielle Sicht auf Zeichen einnimmt – sie repräsentieren Objekte – weist er darauf hin, dass bei so genannten Ikonen und damit auch bei Diagrammen (Diagramme sind nach

Peirce spezielle Ikone) das Objekt rein fiktiv sein kann (Hoffmann 2005: 56). Damit ist speziell bei Diagrammen auch eine nichtreferentielle Betrachtungsweise mit der Peirce'schen Sicht vereinbar.

Im Folgenden wird eine derartige Perspektive bezogen: die Bedeutung der Diagramme und der Zeichen allgemein resultiert aus deren Gebrauch. Diagramme sind in diesem Sinne regeldominierte Sprach- bzw. Zeichenspiele. Geht es um Wörter, Sätze, Sprache oder akustische Zeichen, so werden sie im Folgenden als Sprachspiele, geht es um Inskriptionen, eher als Zeichenspiele gesehen. Der Begriff „Diagramm" selbst kann hier nur kurz angerissen werden. Ausführliche Erläuterungen finden sich etwa bei Hoffmann (2005) oder Stjernfelt (2007). Dem Wittgenstein'schen Bedeutungsbegriff entsprechend sind, wie eben ausgeführt, mathematische oder musikalische Inskriptionen bzw. akustische Zeichen nicht von vornherein Diagramme, sie werden es erst durch deren regelkonformen Gebrauch. Damit Zeichen der Mathematik und solche der Musik zu Diagrammen werden, muss man sie entsprechend der Peirce'schen Sicht als Indexe, Ikone, Symbole bzw. Typen zu verwenden imstande sein. Dies soll nun an konkreten Beispielen erläutert werden:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n}$$

Abb. 1: Beispiele für Diagramme in Mathematik und Musik.

Mit dem Begriff „Index" macht Peirce auf die Funktion des Zeigens aufmerksam. Der Index soll nach Peirce (Hoffmann 2005: 55) die Aufmerksamkeit auf etwas lenken. Er zeigt, ohne etwas Inhaltliches zu behaupten. Zudem „behauptet" er, dass das existiert, was er indiziert. Im Zusammenhang mit den angeführten Inskriptionen (Abb. 1) bedeutet dies etwa, dass man in der Lage sein muss, diese mit Bekanntem zu verbinden. Bei der mathematischen Inskription etwa mit dem Dezimalsystem, dem Stellenwertsystem oder den natürlichen Zahlen. Beim Beispiel der Musiknotation zum Beispiel mit akustischen Erfüllungsgegenständen (d.h. mit den zugeordneten akustischen Zeichen) oder dem Regelsystem der Durtonleiter.

Nach Goodman (1997) sind Notate Erfüllungsgegenständen zugeordnet. Beispiel: Das Klangereignis der Inskription a' ist dessen auditiver Erfüllungsgegenstand. Bei Peirce ist ein Diagramm des Weiteren ein spezielles Ikon, was nach Dörfler (2006: 209) v.a. bedeutet, dass mit einem Diagramm Relationen ausgedrückt oder gezeigt werden. Bei den angeführten mathematischen Inskriptionen (Abb. 1) muss man etwa Beziehungen zwischen den Zahlzeichen herstellen, die angeführten syntaktischen Zeichen regelkonform verwenden oder „n" als Variable gebrauchen können. Entsprechend muss man beim angeführten Musiknotationsbeispiel die Relationen der Tonhöhen herzustellen imstande sein, dies sowohl skriptural als auch akustisch. Damit Zeichen zu Diagrammen werden, muss man darüber hinaus in der Lage sein, sie symbolisch, d.h. nach

Peirce (Hoffmann 2005: 56) per Gesetzmäßigkeit und per Gewohnheit zu gebrauchen. Dies bedeutet hauptsächlich, dass man große Vertrautheit mit dem Gebrauch der entsprechenden Zeichen nach Regeln aufgebaut haben muss.

Eine besondere Herausforderung stellt der Gebrauch der Zeichen als Typen dar. Dabei geht es sowohl in der Mathematik als auch in der Musik einmal um die typographische Verwendung der Zeichen. Die typographische Verwendung der Inskriptionen erfolgt nach Schreibregeln. Beispiel für einen Schreibtyp des Alphabets: a, *a*, **a**, a, a, a usw. Die für die Zuordnung der infrage kommenden Elemente zu Schreibtypen (Klassen) erforderliche Herstellung von Beziehungen kann etwa mithilfe von Prototypentheorien beschrieben werden (vgl. etwa Rosch 1975 oder Lakoff 1987). Ein Prototyp ist dabei ein beispielhaftes Exemplar seiner Klasse. Ein Element wird nach den angeführten Theorien als Mitglied einer Klasse gesehen, wenn es dem Prototyp dieser Klasse ähnlicher als dem Prototyp einer anderen Klasse ist. Für Krämer (2009: 101) geht es bei der Identifikation von empirisch vorkommenden Inskriptionen als Verkörperung eines generellen Typus um eine Wiedererkennungsleistung, die auf der Vernachlässigung von Aspekten der sinnlichen Erscheinung beruht.

In der Mathematik sind die verwendeten Inskriptionen nicht immer syntaktisch disjunkt. Dort, wo „gleiche“ Inskriptionen verwendet werden, ergibt sich die semantische Disjunktivität aber aus dem Kontext. Nehmen wir zum Beispiel die Inskription ○ (Beispiel von Stjernfelt 2007: 96). Sie kann als Inskription des Typs „Kreis“ oder des Typs „runde Scheibe“ (das Innere beinhaltend) oder des Typs „rundes Loch“ (das Innere nicht beinhaltend) oder des Typs „Kegelschnitt“ oder des Typs „Jordankurve“ usw. gelesen werden. Goodman (1997: 173) weist für die Musiknotation die syntaktische Disjunktivität nach und konstatiert auch aufgrund der endlichen Differenzierbarkeit (man benötigt beispielsweise höchstens 4 oder 5 bei den Fähnchen der Notenzeichen), dass Partituren wirklich eine „Sprache“ im Sinne Goodmans sind. In der Musik gibt es auch eine typoakustische Wahrnehmungsebene. Die skripturalen und die akustischen Zeichen sind im Zusammenhang mit der Notenschrift im Hinblick auf Parameter wie Tonhöhe oder Tonlänge zumindest nach dem situativen Gebrauch einander fest zugeordnet und unterscheidbar. Betrachten wir als Beispiel die Unterscheidung der Tonhöhen: Aufgrund des verwendeten Referenztons a‘ und der zugrunde gelegten Stimmung (heute meist die gleichmäßig temperierte Stimmung) ergeben sich Frequenzklassen, die als richtig intonierte Tonhöhen gelten. Außerhalb dieser Frequenzbereiche werden die Tonhöhen als falsch intoniert gewertet. Die eigentliche Typbildung geht aber über die rein typografische und typoakustische Wahrnehmungsebene weit hinaus. In Anlehnung an Brunner (2013) werden im Folgenden Typen als Äquivalenzklassen gesehen, welche über Inskriptionen bzw. akustische Zeichen im Hinblick auf deren Gebrauch gebildet werden. So „werden“ etwa unterschiedliche Inskriptionen wie die angeführten (Abb. 2) zu komplexen Zahlen oder zu Dreiecken durch deren regelkonformen Gebrauch.

1. $2 + 3i \sim 3 + 7i \sim a + bi$

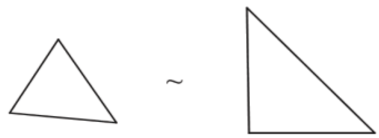
2. 

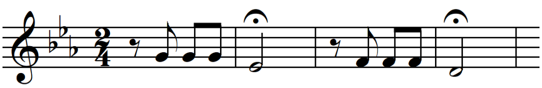
Abb. 2: Die angeführten Inskriptionen gehören im Hinblick auf die Verwendung als „Komplexe Zahl“ (1.) oder als „Dreieck“ (2.) zur gleichen Äquivalenzklasse.

Abb. 3: Diagramm „Durtonleiter“.

In diesem Sinne gibt es etwa kein wahrnehmbares allgemeines Dreieck, man kann aber unterschiedliche schreibregelkonforme Inskriptionen nach den Regeln eines allgemeinen Dreiecks verwenden. Analog kann man auch in der Musik unterschiedliche Inskriptionen bzw. akustische Zeichen nach gleichen Regeln verwenden. Ein Beispiel wäre hier etwa die Durtonleiter (Abb. 3): Unterschiedliche Inskriptionen bzw. die entsprechenden akustischen Zeichen werden nach gleichen Regeln verwendet.

Im Hinblick auf die Typbildung ergibt sich ein erwähnenswerter Unterschied zwischen Mathematik und Musik. Will man mathematische Werke „genießen“ oder besser, will man verständnismäßigen Zugang zu mathematischen Werken (Theoremen, Sätzen, Beweisen…) finden, so muss in man der Lage sein, alle relevanten Typen zu bilden. Man muss also die involvierten Inskriptionen regelkonform als Typen zu gebrauchen imstande sein. Dies bildet die Basis für die Entwicklung von strukturell-inhaltlichem Verständnis. Für Experten/innen gilt dies auch im Zusammenhang mit musikalischen Werken. Auch sie müssen zur genannten Typbildung fähig sein, wenn sie Werke analysieren und in diesem Sinne verstehen wollen. Dies gilt aber nicht generell. „Laien“ können musikalische Werke häufig auch dann genießen, wenn sie nicht alle Typen bilden können. Es macht hier nichts, wenn sie Musikwerke nicht analytisch-strukturell „verstehen“ können. Dies dürfte einer der Gründe sein, warum Mathematiker/innen ihre Werke (Sätze, Theoreme, Beweise usw.) in erster Linie für andere Mathematiker/innen, Komponisten/innen hingegen ihre Werke für ein breites Publikum und nicht ausschließlich für andere Komponisten/innen schreiben. Bedeutungsbildung geschieht in Musik und Mathematik also auch im Hinblick auf die Typbildung auf unterschiedliche Art und Weise. Die Ursachen dieses Phänomens können hier nicht ergründet werden. Von Relevanz sind hier möglicherweise wissenschaftliche Erkenntnisse wie jene, dass das menschliche Gehirn Musik ähnlich wie Sprache verarbeitet (vgl. etwa Georgiades 1984; Jentschke und Kölsch 2007). Im Zusammenhang mit Musik dürfte Bedeutungsbildung auf unterschiedlichsten Ebenen möglich sein (z.B. auch rein emotional), während in der Mathematik Bedeutungsbildung immer ein primär kognitiver Vorgang sein wird.

Es gibt eine Fülle weiterer Verwendungen, durch welche Zeichen zu Diagrammen werden. Man muss beispielsweise die entsprechenden Zeichen als Einheit gebrauchen, sie aber auch zerlegen oder mit anderen Zeichen kombinieren können. Beispielsweise kann man das nachfolgend angeführte Thema des 1. Satzes der 5. Sinfonie in zwei Teile (Motiv und Sequenz) zerlegen. Man kann das Thema aber auch mit anderen Diagrammen (Akkorden) kombinieren und es dadurch harmonisieren. Desgleichen kann man das angeführte Dreieck zerlegen. Man kann etwa einzelne Linien als Seiten oder Paare von Linien als Winkel gebrauchen. Durch das Einzeichnen von Linien etwa als Höhen kann man das Dreieck in rechtwinklige Dreiecke zerlegen oder durch das Hinzufügen von Linien kann man die Inskription als Viereck, Fünfeck usw. gebrauchen.



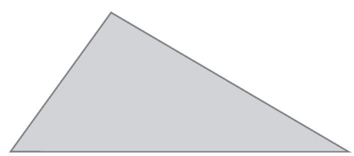


Abb. 4: Diagramm – Zerlegung und Erweiterung.

Die Diagramme sind also eng miteinander vernetzt. Man kann von Diagrammsystemen sprechen. Als Beispiel für ein Diagrammsystem der Mathematik sei hier das Diagrammsystem „Stellenwertprinzip" (Dörfler 2006) erwähnt.

Ein gravierender Unterschied zwischen Mathematik und Musik besteht auch im Hinblick auf eine Bedeutungsweise, die hier „Ausdrucksbedeutung" genannt wird. Während die Bedeutung einer mathematischen Aussage oder eines mathematischen Theorems durch die Art der Aussprache (Akzentuierung, Artikulation, Sprachfärbung, Tonfall, Satzmelodik usw.) nicht geändert werden kann, kann der gleichen Musikpassage durch die Ausdrucksgebung (Interpretation) völlig unterschiedliche Bedeutung zugeordnet werden. Die Bedeutung der Zeichen kann dadurch gravierend geändert werden. Es zeigt sich hier eine besondere Verbindung von Musik und Sprache. Es ist etwa eine Eigenheit von Sprache, dass Bedeutung durch die Zuordnung der Ausdrucksbedeutung geändert werden kann. Beispielsweise kann durch Änderung der Satzmelodie aus einem Aussagesatz ein Fragesatz gemacht werden. Der angeführte Bedeutungsunterschied zwischen Mathematik und Musik hat Auswirkungen auf die jeweiligen Berufsfelder. Während es im Zusammenhang mit Musikwerken eine eigene Berufsgruppe, nämlich die der sogenannten interpretierenden Künstler/innen gibt, die sich ausschließlich mit der Interpretation (also der Zuordnung von Ausdrucksbedeutung) befassen, gibt es eine derartige Berufsgruppe in der Mathematik nicht.

Nach Wittgenstein ist der Gebrauch der Zeichen durch Regeln bestimmt. Im Sinne von Wittgenstein werden Regeln „nicht durch die logische Summe ihrer Beispiele explizit definiert“ (Hoffmann 2007: 1). Hoffmann schreibt weiter:

> Die Regel wird durch eine nicht weiter hintergehbare Ähnlichkeit gegeben, die unter den zu ihrer Definition angegebenen Beispielen besteht. Diese Ähnlichkeit wird durch jedes neu hinzukommende Beispiel fortgeschrieben, verengt, verändert oder auch erweitert. […] Das Erlernen von Regeln beinhaltet daher immer zwei Punkte: Einerseits die Erkennung ihrer Anwendungskriterien in konkreten Situationen, d. h. die Subsumption einer Erfahrung unter der jeweiligen Regel. Andererseits die spezifische Fortschreibung, die Veränderung, die Verengung oder Erweiterung der Regel aufgrund jeder neuen Erfahrung (Hoffmann 2007: 1).

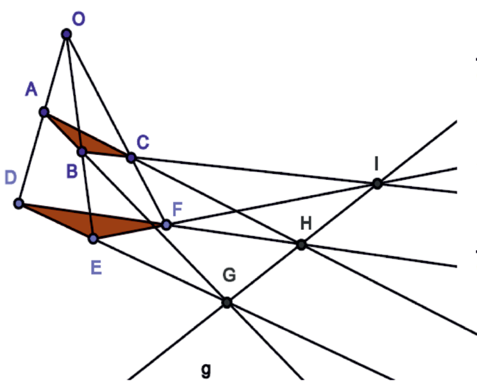
Korrekte Regelanwendung ist im Zusammenhang mit Mathematik nicht einfach. Man muss beispielsweise wissen, welche Regeln in welchen Verwendungskontexten von Zeichen überhaupt Gültigkeit besitzen. Zusätzlich muss man erkennen, welche Anwendungskriterien in einer konkreten Situation die Verwendung einer bestimmten Regel rechtfertigen. Darüber hinaus ist im Zusammenhang mit Mathematik die Beachtung von Regeln alleine schon aufgrund der vielen möglichen Beispiele, die alle zumindest partiell verschiedene Regelverwendung verlangen, nicht einfach. Regeln müssen also ständig nicht nur fortgeschrieben, sondern auch verengt oder erweitert werden. Regelanwendung ist zudem selbst nicht durch eine allgemein gültige Regel beschreibbar. Die Schwierigkeit der Regelanwendung kann etwa mithilfe eines einfachen Beispiels zur Typübertragung sichtbar gemacht werden: $(2-z)/(4-z^2)=1/(2+z) \sim (a-c)/(a^2-c^2)=1/(a+c) \sim (2a-b)/(4a^2-b^2)=1/(2a+b) \sim (3c-2b)/(9c^2-4b^2)=1/(3c+2b) \sim (4+(-b-c))/(16-(b+c)^2)=1/(4+(b+c))$ usw. Diese Form der Regelübertragung (Typübertragung) gibt es auch in der Musik. Hier der Typ „Neapolitanischer Sextakkord“:

Abb. 5: Neapolitanischer Sextakkord als Typ.

In der Musik ist der Gebrauch der Zeichen v.a. durch die Regeln des jeweiligen Kompositionsstils bestimmt (vgl. Abschnitt 3). Insofern müssen sich Komponisten in den Regelgebrauch des verwendeten Stils einarbeiten – es gibt Erlaubtes und Unerwünschtes. Dies galt v.a. bei den relativ homogenen Kompositionsstilen früherer Jahrhunderte. Ab dem 20. Jahrhundert bestimmen viele Komponisten ihren Kompositionsstil selbst. Die Interpretation der Werke ist über weite Strecken ebenfalls regelgeleitet. Sie hängt u.a. von den Regeln des jeweils verwendeten Interpretationsmodus ab. Es kommen hier etwa Modi wie der „historisch-rekonstruktive“, der „traditionelle“ oder der „aktualisierende Modus“ zum Tragen (vgl. Brunner 2009a). Natürlich erfordert die Interpretation der Werke auch Kreativität. Sowohl in Mathematik als auch in Musik ist Regeldurchbrechung im Zusammenhang mit der Entwicklung von Neuem bzw. Unvorhersehbarem von Bedeutung. Beispiel: Parallelführungen waren im traditionellen Tonsatz verboten. Spätestens ab dem Impressionismus wurden sie ein legitimes Stimmführungsmittel.

3. Zeichensysteme

In der Mathematik formuliert man Verschiedenes häufig in unterschiedlichen Zeichensystemen. Hier zwei Beispiele (Abb. 6): links ein Diagramm des Zeichensystems Geometrie, rechts eines des Zeichensystems Algebra.



$$\frac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{(x+2)^2} + \frac{A_2}{(x+2)} + \frac{A_3}{(x-1)}$$

$$2x-1 = A_1(x-1) + A_2(x+2)(x-1) + A_3(x+2)^2$$

$$2x-1 = (A_2 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2 + 4A_3)x + (-A_1 - 2A_2 + 4A_3)$$

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{5}{3(x+2)^2} - \frac{1}{9(x+2)} + \frac{1}{9(x-1)}$$

Abb. 6: Verschiedenes wird in der Mathematik häufig in unterschiedlichen Zeichensystemen notiert (Satz von Desargues, erstellt mit GeoGebra nach Hilbert und Cohn-Vossen 1932, 1996).

Dem gegenüber werden in der Musik (abgesehen von neuen Notationsformen des 20. Jahrhunderts) sogar dramatisch verschieden klingende Werke mit dem gleichen Zeichensystem notiert. Hier ein Beispiel (Abb. 7): Haydns Kopfsatz des D-Dur Streichquartetts (Op. 76, Nr. 5) und Bergs 1. Satz der Lyrischen Suite klingen vollkommen unterschiedlich, werden aber mit dem gleichen Zeichensystem notiert.

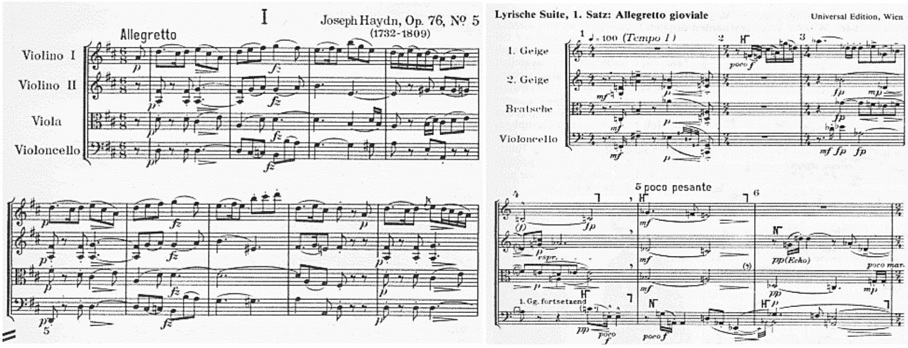


Abb. 7: Dramatisch unterschiedlich klingende Musikstücke werden mit dem gleichen Zeichensystem notiert.

Wie kann man sich diesen Unterschied erklären? Zunächst zur Musik: Bei der Musiknotation verwendet man das gleiche Zeichensystem in verschiedenen Funktionen. Man gebraucht es zunächst als notationales System. Ziel eines notationalen Systems ist nach Goodman (1997) die Identifikation eines Werkes von Aufführung zu Aufführung. Nach Goodman (1997) werden nur solche Aufführungen als Aufführungen des Werkes gesehen, welche die Partitur erfüllen. Es gilt hier auch folgender Zusammenhang: Hat man das Notationssystem und eine Aufführung einer Partitur, dann lässt sich die Partitur wiederherstellen (Goodman 1997: 170). Trotz gewisser Einschränkungen sieht Goodman (1997) das Erfordernis der Identifikation eines Werkes durch die Musik-Notation weitgehend erfüllt. Goodman (1997: 174) betrachtet hierfür Kriterien wie die syntaktische und semantische Disjunktivität der Inskriptionen sowie der zugehörigen Erfüllungsgegenstände (vgl. auch Brunner 2009a: 349, 354).

Trotzdem ist die Zuordnung von inskriptionalen Zeichen und akustischen Zeichen im Zusammenhang mit verschiedensten Parametern nicht eindeutig. Beispielsweise hängt die Umsetzung notierter Rhythmen vom jeweils gewählten Metrum und von individuellen Vorlieben (etwa dem inegalen Spiel) oder die Zuordnung der Tonhöhen vom gewählten Referenzton a‘, von der gewählten Grundstimmung und bei manchen Instrumenten mit variabler Tonhöhe von individuellen Präferenzen ab. Einige Musikparameter wie etwa Dynamik sind überhaupt nur vage, d.h., in Relation zueinander und ohne Normierung geregelt (Brunner 2009a: 361). Dem gegenüber wird in der Mathematik großer Wert auf präzise Bedeutungszuordnung gelegt. Der Zeichengebrauch ist dort genau geregelt. Man verwendet hierfür eigene Mittel wie etwa Definitionen und ist sehr um semantische Disjunktivität und Zeichenökonomie bemüht (Brunner 2011). Dort, wo gleiche schreibregelkonforme Inskriptionen verwendet werden, resultiert die semantische Disjunktivität, wie bereits erwähnt, aus dem Kontext und den verwendeten Sprechweisen.

Sind nun mathematische Zeichensysteme auch notationale Systeme? In der Mathematik gibt es keine Aufführungen.[1] Es kann sich daher bei den verwendeten Zeichensystemen nicht um notationale Systeme im Goodman'schen Sinn handeln. Hinsichtlich der Funktion der Zeichen gibt es in der Mathematik einen alten und unlösbaren Konflikt. Es geht hier um Fragen wie: Haben die Zeichen der Mathematik Repräsentationsfunktion oder stehen sie für sich selbst? Wird Mathematik entdeckt oder erfunden? Ist Mathematik einfach historisch gewachsen oder kommen hier immerwährende Wahrheiten zum Vorschein? Derartige Fragen spielen in der Musik so gut wie keine Rolle. Während Mathematiker/innen im Falle einer referentiellen Sichtweise glauben, dass verschiedene „Darstellungen" wie etwa „a+bi", Polarkoordinaten, Gauß'sche Zahlenebene, Matrizendarstellung oder Riemann'sche Zahlenkugel ein abstraktes, also sinnlich nicht wahrnehmbares Objekt, wie hier etwa jenes der Komplexen Zahlen, repräsentieren, ist es in der Musik schwer vorstellbar, dass etwa alle komponierten Sinfonien eine abstrakte, sinnlich nicht wahrnehmbare ideale Sinfonie darstellen.

Eine weitere Funktion der Musiknotation ist deren Verwendung als Aufführungssystem. Es wird durch sie der Aufführungsprozess eines Werkes geregelt. Viele Eigenheiten der Musiknotation gehen auf diese Funktion zurück. So wird etwa bei mehrstimmigen Werken jede der Stimmen häufig nicht nur in einer Gesamtpartitur, sondern auch in Einzelstimmen notiert. Die Notation ist zudem durch die Art der Differenzierung auf schnelle Lesbarkeit ausgerichtet. Man könnte ja beispielsweise auch 20 Notenlinien verwenden und sich dadurch die verschiedenen Notenschlüssel ersparen. Dies würde aber die schnelle Identifikation der Zeichen erschweren. Geübte Musiker/innen können durch die übliche Art der syntaktischen Differenzierung Werke gut „prima vista" spielen. Die Musiknotation ist zudem gut für die Interpretation der Werke, also für die Zuordnung der Ausdrucksbedeutung geeignet. Man kann ergänzende Eintragungen wie Fingersätze, Atemzeichen, ergänzende dynamische Zeichen usw. anbringen. Das Klanggeschehen wird darüber hinaus anhand der Partitur gut überwachbar (etwa für Dirigenten). Durch die gängige Praxis eines vorgestellten, meist durchlaufenden Metrums gibt es so etwas wie eine imaginäre Zeitachse. Gleichzeitiges wird übereinander notiert. Dies ist eine andere Art der Verwendung der Notation als etwa bei der Analyse der Werke, bei welcher man ja im Text beliebig vor- und rückwärts schreiten kann. All dies unterscheidet die Musiknotation von der Mathematiknotation. In der Mathematik gibt es nicht nur keine Aufführungen, es gibt keine Stimmen und keine Instrumente. Die Untersuchung von Gemeinsamkeiten bzw. Unterschieden zwischen elektronischen Werkzeugen (Taschenrechner, Computer), die in der angewandten Mathematik „wie" Instrumente gesehen werden können, und Musikinstrumenten wäre eigens durchzuführen.

Eine weitere wesentliche Funktion der Musiknotation ist die Verwendung als Diagrammsystem. Wie werden die skripturalen bzw. akustischen Zeichensysteme der Musik nun aber zu skripturalen bzw. akustischen Diagrammsystemen? Das hier erforderliche Regelsystem ist durch den jeweiligen Kompositionsstil bestimmt. Durch ihn wird festgelegt, welche Zeichen als Diagramme, also als Tonleitern, Akkorde, Akkordverbindungen, Harmonisierungen, rhythmische Muster usw. verwendet werden. Während es in früheren Musikepochen so etwas wie einen dominanten Kompositionsstil gab, können ab dem 20. Jahrhundert die Kompositionsstile stark differieren und manchmal sogar von Komponist zu Komponist sehr verschieden sein (Stilpluralismus). Hier ein Beispiel zur Erläuterung der Bedeutung des Kompositionsstils für die Verwendung der Musiknotation als Diagrammsystem: Olivier Messiaen erstellt seine Skalen nach Regeln wie den folgenden: Er teilt die Okatve zunächst in gleiche Teile, beim angeführten Beispiel sind es zwei Tritoni, anschließend ordnet er jedem dieser Teile das gleiche Muster zu (Abb. 8). Hier: Halbton – Halbton – kleine Terz (übermäßige Sekund) – Halbton.

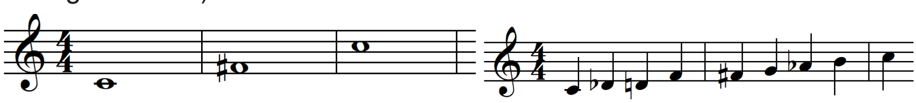


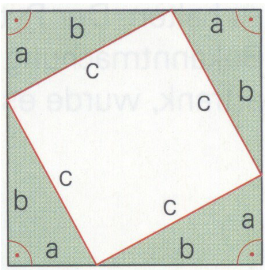
Abb. 8: O. Messiaens Vorgangsweise bei der Erstellung der Skalen.

Seine Akkordverbindungen entwirft Messiaen nun häufig so, dass er einen nach individuellen Gesichtspunkten gewählten Akkord in der Skala (hier die oben angeführte) verschiebt (Abb. 9). Verschieben bedeutet hier, dass die Töne so wie in der Skala aufeinanderfolgen (z.B.: des auf c, g auf fis, c auf h, f auf d usw.).

Abb. 9: O. Messiaens Regeln zur Erstellung einer Akkordfolge.

Weitere Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede zwischen Mathematik und Musik im Hinblick auf den Zeichengebrauch lassen sich anhand typischer Verwendungsweisen der Mathematik sichtbar machen. Zunächst zu Diagrammwechsel bzw. der Diagrammersetzung: In der Mathematik sind Diagrammwechsel, Diagrammersetzungen und Diagrammtransformationen von großer Bedeutung. Es kann beispielsweise „das Gleiche“ leicht anders formuliert werden. Verschiedenes gilt so in bestimmter Hinsicht als gleich. Hier ein einfaches Beispiel: $5 = 3 + 2 = 40 : 8 = 17/3 – 2/3 = 6{,}6 – 1{,}6\ldots$. Auch viele Beweise und Problemlösungen beruhen auf einer anderen Formulierung des Gleichen und geschicktem Diagrammwechsel. Auch dazu ein einfaches Beispiel (Abb.10).

Mathematik kann generell als notationsgetrieben angesehen werden: Neue Zeichen bieten neue Möglichkeiten. Dies ist bereits am sehr einfachen Beispiel der Zahl „5“ (oben) zu erkennen. Die Kombination von Zeichen dient in der Mathematik dem Kenntnisgewinn, der Begriffsbildung und der Problemlösung. Nach Dörfler (2006) dient dabei der Kenntnisgewinn innermathematisch v.a. der Erweiterung des Wissens über Diagramme.



Aus $(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$ (Flächeninhalt auf zwei Arten formuliert) folgt $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ und daraus $a^2 + b^2 = c^2$.

Abb. 10: Beweis des Satzes von Pythagoras – der Flächeninhalt wird auf verschiedene Arten formuliert, anschließend wird algebraisch geschickt transformiert.

Hier ein Beispiel zur Kombination von Zeichen: Kombiniert man etwa Linien im Sinne eines Koordinatensystems, verwendet man sie also als orthogonal und verwendet man Einheitslängen als 1, so kann man Punkten der Ebene Koordinaten zuordnen, man kann Aspekte wie etwa Richtung herstellen und solchen Aspekten wiederum Zahlen zuordnen. Man kann in der Folge Linien als Funktionen und mit dem bekannten Grenzübergang Linien als Tangenten gebrauchen. Diese Tangenten kann man wiederum mithilfe der Algebra als „Steigung der Funktion an einer bestimmten Stelle“ interpretieren. Man hat damit ein neues Diagramm und einen neuen Begriff entwickelt. Diagramme (Begriffe) wie diese stehen für mathematische Kenntnisse. Das angeführte Diagramm kann auch zur innermathematischen und deskriptiven Problemlösung eingesetzt werden. Wenn man es so sehen will, so hat man ein komplexes Diagramm mithilfe einer speziellen Sichtweise zu einer neuen Formel komprimiert.

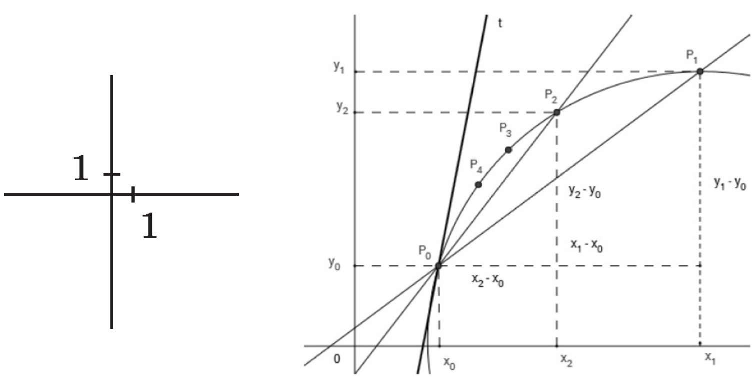


Abb. 11: Schaffung neuer Diagramme und Begriffe durch die Kombination von mathematischen Zeichen.

Viele Gebiete der Mathematik wie etwa die Analytische Geometrie oder die Komplexen Zahlen verdanken ihre Entstehung auch der Kombination oder der Neueinführung von Zeichen. Bei den Komplexen Zahlen gilt dies etwa für $i = \sqrt{(-1)}$. Übergeordnete Diagramme reorganisieren (komprimieren) zudem in der Mathematik untergeordnete. Beispiele: Multiplikationen reorganisieren bestimmte Additionen, Potenzen bestimmte Multiplikationen usw. Derartige Reorganisationen bewirken Zeichenökonomie, Überblick und verbesserte operative Handhabbarkeit (vgl. Brunner 2009b, 2011). Vieles davon ist in der Musik anders. Die musikalischen Werke sind nicht auf Kenntnisgewinn ausgerichtet und es wäre sinnlos, etwa eine Sinfonie zu einer Formel zu komprimieren. Musikalische Werke dienen zudem nicht der Lösung deskriptiver Probleme. Sie können aber, wohl nicht auf dieselbe Weise wie mathematische Werke, auch innerfachlich Probleme formulieren und Lösungen vorschlagen bzw. entwickeln. So exerzieren beispielsweise Chopins Oktaven-, Terzen- und Sextenetüden (Op. 25 Nr. 6, 8, 10) den Einsatz von Doppelgriffpassagen im Hinblick sowohl auf ihre musikalischen Ausdrucksmöglichkeiten als auch als technisch-interpretative Herausforderung durch. Während Begriffe in mathematischen Werken expliziert definiert und entwickelt werden, stehen musikalische Werke meist nur indirekt mit Begriffen im Zusammenhang. So charakterisiert etwa ein Begriff wie „Durchführung“ der Sonatensatzform die Entwicklung des in der Exposition gegebenen Materials (durch Modulation, Rekombination, motivische Abwandlung usw.). Die Musik entwickelt also auch relativ präzise fassbare Konzepte, die innermusikalisch als Begriffe verstanden werden können. Es stehen aber nicht ganze Werke explizit im Dienste der Entwicklung eines bestimmten Begriffs.

4. Diagramme und Deskription

Eine Fülle von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen Mathematik und Musik besteht hinsichtlich der deskriptiven Verwendung der Diagramme. In der Musik verwendet man eine feste Form der Deskription. Es können zwar verschiedene Regelsysteme, wie etwa verschiedene Stimmungen, bei der Umsetzung eines Notentextes angewandt werden, die skripturalen und die zugeordneten Zeichen (Erfüllungsgegenstände) sind aber nach Wahl der jeweiligen Regelsysteme durch die Interpreten/innen zumindest situativ fest miteinander verbunden. Dem gegenüber gibt es in der Mathematik keine feste Deskription. Die mathematischen Diagramme sind für verschiedenste deskriptive Verwendungen offen. Sie können vielfältig als Modelle für anderes gebraucht werden. Beispiel: Mithilfe einer Funktion wie $s(t) = 3/2 \cdot t^2 + c$ mit $v(t) = 3t$ ($m/sec.$) und $s(0) = 0$ kann der zurückgelegte Weg im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ berechnet werden: $w(t_1; t_2) = \int_{t_1}^{t_2} 3t\, dt = 3/2 \cdot (t_2^2 - t_1^2)(m)$. Diese Funktion kann aber, wie alle Funktionen und alle Diagramme der Mathematik, in unterschiedlichsten anderen Kontexten deskriptiv eingesetzt werden. Sie kann aber auch rein innermathematisch genutzt werden.

Wie steht es nun aber mit der Rolle von Kontexten im Hinblick auf die Diagrammentwicklung? In der Mathematik stehen häufig innermathematische Probleme am Anfang der Entwicklung neuer Diagramme. Bei der Entwicklung der Komplexen Zahlen standen etwa Ergebnisse bei der Lösung konkreter Gleichungen am Anfang der Entwicklung des Diagramms „a+bi". Daneben sind aber häufig auch Probleme der sogenannten Realität bzw. der Lebenswelt Ausgangspunkt für die Entwicklung von Modellen und geeigneten Diagrammen. In vielen Fällen werden dabei auch bestehende Diagramme vereinheitlicht, kombiniert und restrukturiert (vgl. Brunner 2011). Als Beispiel kann hier der sogenannte Wiener-Prozess angeführt werden. Ausgangspunkt für diesen Prozess war die sogenannte „Brown'sche Bewegung" (vgl. z.B. Davis und Etheridge 2006). 1827 beobachtete der schottische Botaniker Robert Brown unter dem Mikroskop, dass Pflanzenpollen unregelmäßige „Zick-Zack-Bewegungen" ausführen. Um ca. 1900 versuchte Bachelier mit Hilfe eines solchen Prozesses die Kursbewegungen an der Pariser Börse zu analysieren. Einstein (1905) und unabhängig von ihm Smoluchowski (1906) definierten den Wiener-Prozess in seiner heutigen Gestalt. Einstein beschäftigt sich in der betreffenden Arbeit mit der „von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen" (Einstein 1905). In der Folge gelang es 1923 Wiener durch Restrukturierungsmaßnahmen (z.B. der Sichtweise als Markov-Prozess, durch stetige Pfade und einen konstanten Erwartungswert) und der Einbeziehung von Hilfsmitteln (z.B. maßtheoretische Hilfsmittel von Lebesgue und Borel) den Prozess wahrscheinlichkeitstheoretisch abzuleiten.

Die Herauslösung des Prozesses aus der realen Ausgangsumgebung und die damit verbundene Diagrammatisierung des Prozesses als Irrfahrt erlaubten durch die Loslösung aus der „metaphorischen Umgebung" die zielgerichtete Bearbeitung des Problems, die Einbeziehung anderer mathematischer Darstellungsmethoden und Erkenntnisse und in der Folge die Anwendung der neu entwickelten Formelsprache in „metaphorischer Umdeutung" in weiteren realen Situationen. Anwendungen in neuen realen Situationen können ebenfalls als Restrukturierung gesehen werden. Heute werden Brown'sche Bewegungen und verwandte Prozesse in so gut wie allen Natur- und Sozialwissenschaften als Hilfsmittel verwendet. Die Brown'sche Bewegung, der Wiener-Prozess und seine Weiterentwicklungen sind beispielsweise auch bei der Simulation von Aktienkursverläufen oder der Erforschung von Warteschlangen von Bedeutung. Bei der Entwicklung von derart eingesetzten Diagrammen geht es um die Entwicklung von Symbolen, die für Wissende per Gesetzmäßigkeit und Gewohnheit für etwas, also einen bestimmten deskriptiven Kontext stehen.

In der Musik wird die Verwendung der Zeichen als Diagramme auch von außermusikalischen deskriptiven Kontexten beeinflusst. Es geht dabei aber nicht um Problemlösung. Ein Beispiel wäre hier die ritualisierte Formulierung von „Gefühlen" mithilfe von Affekten. Die Affektenlehre geht auf die griechische Antike zurück. Sie besagt, dass Gefühle wie etwa Freude oder Trauer musikalisch ausgedrückt und bei den Hörenden hervorgerufen werden können. Sie ist eng mit der Annahme von Gemeinsamkeiten von Sprache und Musiksprache (Musica Poetica) verbunden. Es geht dabei einerseits um den „Affectus“ (Gefühl, Zustand, Leidenschaft usw.) und andererseits um „afficere, affectum“ (in einen Zustand versetzen, einstimmen). Die Affektenlehre spielte in der Musik des Barock und darüber hinaus eine große Rolle. Komponisten versuchten dabei, gewünschte Affekte beim Publikum auszulösen. Es liegt dabei auch in der Kunst der Interpreten, diese Affekte entsprechend zur Geltung zu bringen. Die Interpreten sollten sich hierfür sogar selbst in den entsprechenden Affekt versetzen. Die diagrammatische Bedeutung des Affekts liegt in seinem Regelcharakter. Beispiele: Die Darstellung des „Erschreckens“ wurde etwa durch Unterbrechung der Melodie (Apokope) regelhaft formuliert. Ein Ausdruck von Trauer war etwa der absteigende Tetrachord wie etwa beim Lamento „When I am laid in earth“ aus der Oper „Dido and Aeneas“ von Henry Purcell.[2] Noch Mozart soll übrigens von seinem Vater mit Regeln wie der folgenden vertraut gemacht worden sein: „Willst du Freude ausdrücken, so verwende Sprünge (große Intervalle), willst du Trauer ausdrücken, so benutze kleine Intervalle (v.a. Halbtöne)“. Anweisungen wie die angeführte haben natürlich eine körperliche Komponente. Ist man traurig, so will man sich im Normalfall nicht bewegen, man erstarrt. Empfindet man hingegen Freude, so wird man diese Freude womöglich durch Sprünge ausdrücken. Im Gegensatz zur Musik ist es kein Ziel der Mathematik, Gefühle oder innere Zustände auf ritualisierte, regelhafte Art und Weise zu formulieren.

Ein anderer Bereich der Kopplung der regelgeleiteten Ausformung von Diagrammen und der symbolhaften Belegung dieser ist die sogenannte „Programmmusik“. Der Symbolgehalt erschließt sich hier einmal denjenigen, die das Programm kennen. Es gibt aber auch Werke der Programmmusik, bei welchen sich die gewünschte Assoziation alleine aufgrund des Höreindrucks aufdrängt. Ein Beispiel wäre hier etwa die lautmalerische Darstellung von Vogelgesang etwa bei Vivaldi, Beethoven, Ravel oder Messiaen. Manchmal kann bei der Entwicklung eines Diagramms der Programmmusik ein mehrstufiger Transformationsprozess vermutet werden. Hier ein Beispiel dazu:

Abb. 12: Quelle als Diagramm.

Diese in der Folge weiter aufsteigende Melodie stellt in Vivaldis „Frühling“ eine Quelle dar. Offensichtlich ist das Vorbild die aufsteigende Wellenlinie als Symbol von Wellen und Wasser. Dieses figürliche Symbol wurde in ein relationales Diagramm umgedeutet, welches wiederum symbolisch gedeutet werden kann. Das Aufsteigen kann etwa als „Weiterfließen“ oder „Größerwerden“ interpretiert werden.

Komponisten verwenden immer wieder mathematische Diagramme als Inspiration für ihre Kompositionen. Diese mathematischen Diagramme bilden dann den relationalen Kern im Zusammenhang mit einem oder mit mehreren musikalischen Parametern. Ein Beispiel hierfür ist der nachfolgend angeführte Anfang des 3. Satzes der Musik für Saiteninstrumente, Schlagzeug und Celesta von Bela Bartok. Bartok verwendet hier den Anfang der Fibonacci-Folge: 1, 1, 2, 3, 5, 8. Der nach dieser Folge komponierte Rhythmus findet sich im Part des Xylophons. Der benutzte Ausschnitt der Folge wird gespiegelt. Nimmt man die Pausen hinzu, so kann diese Xylophonpassage als Anwendung des Diagramms 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 0 betrachtet werden:

Abb. 13: B. Bartok: Beginn des 3. Satzes der Musik für Saiteninstrumente, Schlagzeug und Celesta.

Es ließen sich hier viele weitere Beispiele anführen. So verwendet etwa G. Ligeti im 4. Satz seines Klavierkonzertes die „Kochkurve" als relationales Gestaltungselement.

5. Diagrammatik

Im Zusammenhang mit Kenntniserwerb bzw. Problemlösung ist in der Mathematik die experimentelle Nutzung der Diagramme und damit eine bestimmte Art des Denkens, welche nach Peirce als „diagrammatisches Denken", „diagrammatisches Schließen" oder „diagrammatisches Begründen" bezeichnet werden kann, von besonderer Bedeutung. Zum Begriff „diagrammatisches Schließen" schreibt Peirce (1976, Bd. IV: 47f.):

> By diagrammatic reasoning, I mean reasoning which constructs a diagram according to a precept expressed in general terms, performs experiments upon this diagram, notes their results, assures itself that similar experiments performed upon any diagram constructed according to the same precept would have the same results, and expresses this in general terms. This was a discovery of no little importance, showing, as it does, that all knowledge without exception comes from observation.

Nach der Peirce'schen Sicht können also mithilfe von Experimenten, Manipulationen, Beobachtungen sowie der Notation und Verifizierung von Resultaten Kenntnisse gewonnen und verifiziert werden. Kenntnisse sind nach der im vorliegenden Aufsatz vertretenen Sichtweise v.a. solche über mathematische Diagramme. Sie können an diesen Regularitäten und Irregularitäten sichtbar machen, zu verbesserter operativer Handhabbarkeit oder Zeichenökonomie führen und Problemlösungen ermöglichen (vgl. Brunner 2009b). Die epistemologische Nutzung der Diagramme kann häufig auch als kreativer Blickpunktwechsel interpretiert werden (Hoffmann 2005; Brunner 2020). Mithilfe des diagrammatischen Schließens können auch Sachverhalte verallgemeinert und verifiziert werden (vgl. Hoffmann 2005: 220). Einfache Beispiele: Versucht man etwa die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen, so wird durch geschickte Manipulationen mit den Inskriptionen wie $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = (1+99) + (2+98) + \ldots + (49+51) + 50 + 100 = 50 \cdot 100 + 50$ der Übergang von Additionen zu Multiplikationen ermöglicht. Der operative Vorteil von „$50 \cdot 100 + 50$“ ist gegenüber „$(((1+2)+3)+4)+\ldots$“ unübersehbar. Durch weitere derartige Manipulationen und Experimente mit verschiedenen $n \in \mathbb{N}$ sowie entsprechenden diagrammatischen Begründungen (Induktionsbeweisen) kann etwa die Formel $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = (n(n+1))/2$ gefunden und ihre Richtigkeit nachgewiesen werden. Derartige geschickte Manipulationen sind im Normalfall das Ergebnis von Vertrautheit mit den entsprechenden Diagrammen und Ausdruck entsprechender Kreativität. Analog kann man etwa mithilfe eines einfachen geometrischen Experiments leicht erkennen, dass der Umfang der Figur von Abb. 14 von y unabhängig ist. Es gilt: „$u = 2x + 2z$“.

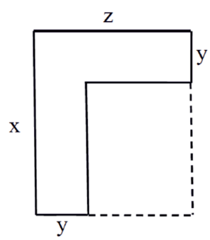


Abb. 14: Die kreative Veränderung der Linien (gestrichelte Linien) führt im Zusammenhang mit dem Umfang zur Kenntnis: $u = 2x+2z$.

Was kann nun aber diagrammatisches Denken in der Musik bedeuten? Hier ein Beispiel: Beim nachfolgend angeführten Anfang der C-Dur Invention konstruiert Bach zunächst ein Thema, diagrammatisch formuliert konstruiert er ein Diagramm:

Dieses Diagramm kann in zwei Teile gegliedert werden:

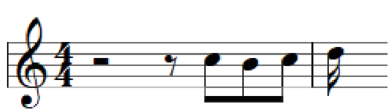
Teil 1:  Teil 2: 

Abb. 15: Das Thema der C-Dur Invention von Bach kann als Diagramm betrachtet werden.

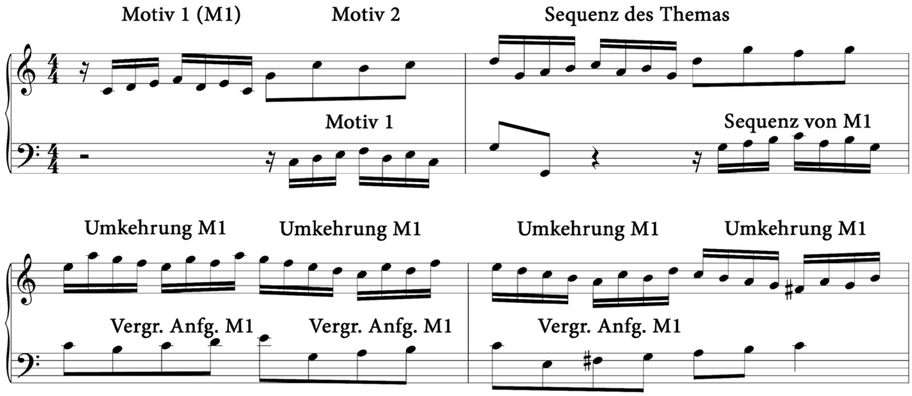


Abb. 16: Anfang der C-Dur Invention von J. S. Bach.

Das Thema bzw. die in Abb. 15 angeführten Thementeile werden nun diagrammatisch verarbeitet. Aus dem Thema (Diagramm) leitet Bach andere Diagramme (Derivate) nach Regeln ab. Hier die wesentlichen Derivate: Sequenz des Themas (Thema von g‘ aus, 2. Takt – Oberstimme); Imitation des Themenkopfes (1. Takt – Unterstimme und 2. Takt – Unterstimme); Umkehrungen des Themenkopfes in Sequenzen hintereinander gehängt (Oberstimme, 2. Zeile); Vergrößerungen der ersten vier Töne von Motiv 1 (Vergr. Anfg. M1) in Sequenzen aneinandergehängt (Unterstimme, 2. Zeile).

Bach macht bei den angeführten Derivaten tonale Konzessionen. Er ändert Intervalle ab. Diese Änderungen sind v.a. durch das geltende Diagrammsystem und damit den Kompositionsstil bestimmt (vgl. Abschnitt 2.1). Es ist hier der Kontrapunkt. Beim Kontrapunkt ist genau geregelt, welche Schritte im zweistimmigen Satz die beiden Stimmen zueinander vollführen dürfen. Die angeführte Form der Diagrammatik betrifft in der Musik v.a. die Parameter Tonhöhe und Rhythmus.

Welche Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede zwischen Mathematik und Musik sind nun im Hinblick auf Diagrammatik zu erkennen? Sowohl in der Mathematik als auch in der Musik konstruiert man Diagramme und leitet nach Regeln andere Diagramme (Derivate) aus den „ursprünglichen“ Diagrammen ab. In beiden Bereichen ist daher die Korrespondenz zwischen den konstruierten und den abgeleiteten Diagrammen von großer Bedeutung. Die Korrespondenz hat aber unterschiedliche Bedeutung. Sie dient in der Mathematik der Kenntnisentwicklung und der Problemlösung, in der Musik dient sie v.a. der Herstellung von inneren Bezügen. Diese inneren Bezüge können in der Musik etwa im Sinne der Rhetorik oder wie es Harnoncourt formuliert „der Klangrede“ interpretiert werden (vgl. etwa Harnoncourt 1982, 1994). Sowohl in der Mathematik als auch der Musik gibt es verschiedenste Formen der Korrespondenz. Eine Form ist jene der relationalen Gleichheit. In der Musik kann sich diese Form der Korrespondenz auf verschiedenste Parameter beziehen. Beispiele wären hier Transpositionen, isorhythmische Passagen, harmonische Schemata usw. Es handelt sich hier jeweils um gleiche Typen im Sinne des „token-type-Konzepts“ von Peirce (vgl. Brunner 2013). In der Mathematik gibt es neben dieser Form des Typs auch Formen der Gleichheit, welche über das „token-type-Konzept“ hinausgehen. Viele Diagramme, die in der Mathematik zumindest in einer gewissen Hinsicht als gleich empfunden werden können, stammen aus verschiedenen Zeichensystemen. Einfaches Beispiel: Vektoraddition geometrisch und algebraisch. Es ließen sich hier viele weitere Beispiele anführen. Stellvertretend sei etwa auf die Komplexen Zahlen verwiesen. Hier stehen Diagramme aus unterschiedlichen Zeichensystemen wie „a+bi“, Polarkoordinaten, Gauß’sche Zahlenebene, Matrizenrechnung, Riemann’sche Zahlenkugel zur Verfügung. In der Musik gibt es Gleichheit nur im selben Zeichensystem, also inskriptional oder akustisch. In beiden Bereichen gibt es neben der Gleichheit auch andere Formen der Korrespondenz zwischen Diagrammen: In der Musik Formen wie die oben angeführten: Umkehrung, Spiegel, Krebs, Sequenz usw., in der Mathematik etwa alle Arten von Transformationen oder Operationen, Ableitung, Integration usw. Immer wenn ein Diagramm nach Regeln verändert wird, entsteht eine Form der Korrespondenz.

Es ergeben sich viele Gemeinsamkeiten von Mathematik und Musik, wenn man die diagrammatischen Tätigkeiten miteinander vergleicht. Sowohl bei diagrammatischen Arbeiten in der Mathematik (etwa bei der Herleitung eines Beweises) als auch beim diagrammatischen Arbeiten in der Musik (etwa beim Komponieren) schreibt, denkt, beobachtet, vergleicht oder verwirft man. Man schreibt vieles neu, man erstellt und verändert Skizzen usw. Dörfler (2006) sieht hier mathematisches Tun im Sinne von Aristoteles als „Techne“, als reflektiertes Handwerk (Schreibwerk) des produktiv-kreativ-imaginativen Arbeitens mit Diagrammen. Rotman (2000) charakterisiert dieses Zusammenwirken von Schreiben und Denken für die Mathematik mit seinem „Scribbling and thinking“. Diagrammatische Tätigkeiten können aber auch in der Musik, zumindest was das Komponieren oder das Arrangieren von Werken betrifft, als reflektiertes Handwerk im beschriebenen Sinn gesehen werden, wobei Hören in Interaktion mit Schreiben im Normalfall einbezogen sein wird. In der Musik erfordert auch das Zuordnen der Ausdrucksbedeutung (Interpretieren) ein hohes Maß an Kreativität und handwerklichem Geschick. Auch hier probiert, verwirft, fixiert man usw. Ob und inwieweit Interpretation als diagrammatisch gesehen werden kann, muss an anderer Stelle erläutert werden.

6. Resümee

Der Vergleich von Diagrammatik und Zeichentätigkeiten in Mathematik und Musik zeigte Ähnlichkeiten, aber auch große Unterschiede. Die häufig behauptete Verwandtschaft von Mathematik und Musik kann damit einerseits bestätigt, andererseits aber auch bezweifelt werden. Es zeigt sich, dass viele Aspekte des diagrammatischen Denkens, welche Peirce und andere (etwa Hoffmann) v.a. im Hinblick auf Mathematik aufgeworfen haben, auch im Zusammenhang mit Tätigkeiten der Musik wie etwa Komponieren gelten. Exemplarisch kann hier Bedeutungsbildung durch Korrespondenz angeführt werden. Die Ausrichtung der Musik ist aber eine gänzlich andere als jene der Mathematik. Aspekte wie Kenntniserwerb, Problemlösung oder Verifizierung spielen bei ihr keine Rolle. Es geht bei ihr um Gesichtspunkte wie die Aufführung von Werken für ein Publikum oder die Zuordnung von Ausdrucksbedeutung durch Interpret/innen. Im Hinblick auf Lebenswelt und Deskription ergeben sich ebenfalls unterschiedliche Ausrichtungen.

Anmerkungen

1 Inwieweit der Vortrag eines Beweises oder generell eine Vorlesung als eine Art von Aufführung betrachtet werden kann, wäre noch eigens zu klären.

2 Vgl. Wikipedia-Artikel „Affektenlehre". https://de.wikipedia.org/wiki/Affektenlehre, zuletzt aufgerufen am 09.03.2020.

Literatur

Brunner, Martin (2009a). Das Operieren am Ikon. Diagramme in Musik und Mathematik. *Zeitschrift für Semiotik* 31, 3–4, 341–380.

Brunner, Martin (2009b). Lernen von Mathematik als Erwerb von Erfahrungen im Umgang mit Zeichen und Diagrammen. *Journal für Mathematik-Didaktik* 30, 3–4, 206–231.

Brunner, Martin (2011). Ständige Restrukturierung – ein Erfordernis des Lernens von Mathematik. *mathematica didactica* 34, 20–49.

Brunner, Martin (2013). Didaktikrelevante Aspekte im Umfeld der Konzepte token und type. *Journal für Mathematik-Didaktik* 34, 1, 53–72.

Brunner, Martin (2020). Theorematische Deduktion als kreative Verwendung von Inskriptionen. In: Gert Kadunz (ed.). *Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht.* Berlin: Springer, 29–52.

Davis, Mark und Alison Etheridge (2006). *Louis Bachelier's Theory of Speculation.* Princeton University Press.

Dörfler, Willi (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik* 27, 3–4, 200–219.

Einstein, Albert (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik* 17, 549–560.

Georgiades, Thrasybulos G. (1984). *Musik und Sprache*. Berlin, Heidelberg und New York: Springer.

Goodman, Nelson (1997). *Sprachen der Kunst*. Frankfurt: Suhrkamp.

Harnoncourt, Nikolaus (1982). *Musik als Klangrede.* Salzburg: Residenz; Neuauflage 2004.

Harnoncourt, Nikolaus (1994). *Der musikalische Dialog.* Kassel: Bärenreiter.

Hilbert, David und Stepnan Cohn-Vossen (1932, 1996). *Anschauliche Geometrie*. Berlin und Heidelberg: Springer.

Hoffmann, Achim (2007). Wittgensteins Regelbegriff. Internetmanuskript: http://www.cse.unsw.edu.au/~achim/Research/Philosophie/node68.html. [letzter Zugriff am 12.10.12].

Hoffmann, Michael (2005). *Erkenntnisentwicklung*. Philosophische Abhandlungen Bd. 90. Frankfurt am Main: Klostermann.

Jentschke, Sebastian und Stefan Kölsch (2007). Sprach- und Musikverarbeitung bei Kindern: Einflüsse musikalischen Trainings. Internetmanuskript: https://www.researchgate.net/publication/235907645_Sprach-_und_Musikverarbeitung_bei_Kindern_Einflusse_musikalischen_Trainings [letzter Zugriff am 22.03.2020].

Krämer, Sybille (2009). Operative Bildlichkeit. Von der ‘Grammatologie’ zu einer ‘Diagrammatologie’? Reflexionen über erkennendes ‘Sehen’. In: Martina Heßler und Dieter Mersch (eds.). *Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft.* Bielefeld: transcript, 94–121.

Lakoff, George (1987). *Women, fire and dangerous things. What categories reveal about the mind*. Chicago, London: The University of Chicago Press.

Mazzola, Guerino (1990). *Geometrie der Töne*. Basel: Birkhäuser.

Meyer, Michael (2010). Wörter und ihr Gebrauch – Analyse von Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht. In: Gert Kadunz (ed.). *Sprache und Zeichen*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker, 49–80.

Peirce, Charles S. (1976). *The New Elements of Mathematics*. Bd I–IV (ed. By Carolyn Eisele). The Hague-Paris/Atlantic Highlands, N. J.: Mouton/Humanities Press.

Rosch, Eleanor (1975). Cognitive reference points. *Cognitive Psychology* 7, 532–547.

Rotman, Brian (2000). *Mathematics as Sign. Writing, Imaging, Couting*. Stanford: Stanford University Press.

Smoluchowski, Marian (1906). Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. *Annalen der Physik* 21, 756–780.

Stjernfelt, Frederik (2007). *Diagrammatology – An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics*. Dordrecht: Springer.

Wittgenstein, Ludwig (1978). *Wittgensteins Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik*. Schriften Band 7. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, Ludwig (1984a). *Philosophische Grammatik*. Herausgegeben von Rush Rhees (2015), Werksausgabe, Band 4. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, Ludwig (1984b). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, Ludwig (2003). *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

PD Dr. Martin Brunner
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
Institut für Didaktik der Mathematik
Sterneckstr. 15
A-9020 Klagenfurt
E-Mail: Martin.Brunner@aau.at